1.4 Nizovi merljivih funkcija

Podsetimo se: Neka je $(a_k)_{k\in\mathbf{N}}$ niz u $[-\infty,\infty]$. Tada je

$$\lim_{k\to\infty}\sup a_k = \inf_{n\in\mathbf{N}}(\sup_{k\geq n} a_k), \quad \lim_{k\to\infty}\inf a_k = \sup_{n\in\mathbf{N}}(\inf_{k\geq n} a_k).$$

Neka je $b_n = \sup\{a_k : k\geq n\}$, $n\in\mathbf{N}$. To je monotono nerastući niz. Za niz $\bar{b}_n = \inf\{a_k : k\geq n\}$, $n\in\mathbf{N}$ važi da je monotono neopadajući niz. Dakle, za proizvoljan niz u $[-\infty,\infty]$ uvek postoje limes superior i limes inferior u $[-\infty,\infty]$.

Za skupove uvodimo definicije:

Definicija 1.8. Ako $A_k\in\mathcal{P}(X)$, $k\in\mathbf{N}$ tada je

$$\limsup_{k\to\infty} A_k = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k\geq n} A_k, \quad \liminf_{k\to\infty} A_k = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k\geq n} A_k.$$

▲

Dakle, $x\in\limsup\limits_{k\to\infty} A_k$ ako je $x\in\bigcup\limits_{k\geq n} A_k$ za svaki prirodan broj n, odnosno ako se x nalazi u beskonačno mnogo skupova A_k.

Slično, $x\in\liminf\limits_{k\to\infty} A_k$ ako je bar u jednom od $\bigcap\limits_{k\geq n} A_k$, što znači da postoji $n\in\mathbf{N}$ tako da $x\in A_k$ za svako $k\geq n$ odnosno x se nalazi u svim sem u konačno mnogo skupova A_k.

U sledećoj teoremi i propozicijama 1.7 i 1.8 pretpostavljamo da je $(X,\mathcal{M})$ prostor sa $\sigma-$ algebrom.

Teorema 1.6. Neka je $(f_k)_{k\in\mathbf{N}}$ niz merljivih funkcija $f_k : X\to[-\infty,\infty]$. Tada su sledeće funkcije merljive:

1) $\sup\limits_{k\in\mathbf{N}} f_k(x) = f(x)$, $x\in X$;

2) $\inf\limits_{k\in\mathbf{N}} f_k(x) = \tilde{f}(x)$, $x\in X$;

3) $\limsup\limits_{k\to\infty} f_k(x) = \tilde{\tilde{f}}(x)$, $x\in X$;

4) $\liminf\limits_{k\to\infty} f_k(x) = \tilde{\tilde{\tilde{f}}}(x)$, $x\in X$.

Dokaz: 1) Pokažimo da je $x\mapsto f(x) = \sup\limits_{k\in\mathbf{N}} f_k(x)$, $x\in X$ merljiva. Treba pokazati da je $f^{-1}((a,\infty])\in\mathcal{M}$, pa će na osnovu Teoreme 1.5 c) slediti da je f merljiva funkcija.